к вектору ∇ приводит к ряду соотношений между градиентом, дивергенцией и ротором, напр.

$$[\nabla(\nabla\varphi)]=0,\ \text{или}\ \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=0;$$
$$(\nabla[\nabla\boldsymbol{a}])=0,\ \text{или}\ \operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0;$$
$$[\nabla[\nabla\boldsymbol{a}]]=\nabla(\nabla\boldsymbol{a})-\nabla^2\boldsymbol{a},$$

или

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}-\Delta\boldsymbol{a}.$$

При такого рода формальных преобразованиях необходимо следить, чтобы дифференц. оператор ∇ в окончат. выражении стоял слева от той ф-ции, на к-рую он действует. Если оператор ∇ действует на произведение двух ф-ций, то по правилу Лейбница (правило дифференцирования произведения) можно записать результат в виде суммы двух членов:

$$\nabla(\varphi\psi)=\varphi\nabla\psi+\psi\nabla\varphi,$$

или

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi)=\varphi\operatorname{grad}\psi+\psi\operatorname{grad}\varphi.$$

Сочетая правило Лейбница с правилами векторной алгебры, можно получать соотношения такого типа:

$$(\nabla(\boldsymbol{a}\varphi))=\varphi(\nabla\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}\nabla\varphi),$$

или

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{a}\varphi)=\varphi\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\operatorname{grad}\varphi.$$

В случае более сложных алгебраич. выкладок на промежуточных этапах следует отмечать стрелкой ту ф-цию, на к-рую действует оператор ∇, не заботясь о порядке следования оператора и ф-ций, и лишь на последнем этапе возвращаться к обычному порядку:

$$[\nabla(\boldsymbol{a}\varphi)]=[\nabla\check{\boldsymbol{a}}\varphi]+[\nabla\boldsymbol{a}\check{\varphi}]=\varphi[\nabla\boldsymbol{a}]-[\boldsymbol{a}\nabla\varphi],$$

или

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\varphi)=\varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-[\boldsymbol{a}\operatorname{grad}\varphi].$$

Т. о., получаем:

$$\operatorname{div}[\boldsymbol{ab}]=\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b},$$
$$\operatorname{rot}[\boldsymbol{ab}]=\boldsymbol{a}\operatorname{div}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\operatorname{div}\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b},$$
$$\operatorname{grad}(\boldsymbol{ab})=[\boldsymbol{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{b}]+[\boldsymbol{b}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}]+(\boldsymbol{b}\nabla)\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{b}.$$

Все осн. дифференц. операции В. а. имеют определ. геом. смысл, поэтому значения выражений $\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$ не зависят от выбора системы координат. Все соотношения между дифференц. выражениями также носят инвариантный характер.

В приложениях часто встречаются п о т о к в е к т о р а через заданную поверхность и интеграл от него вдоль заданной кривой:

$$\int_S\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{S}=\int_S a_n\,dS=\int_S(a_1\,dx_2\,dx_3+a_2\,dx_3\,dx_1+a_3\,dx_1\,dx_2),$$
$$\int_L\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\int_L a_\tau\,dl=\int_L(a_1\,dx_1+a_2\,dx_2+a_3\,dx_3).$$

Здесь $a_n=(\boldsymbol{an})$ — проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на нормаль к поверхности в данной точке, $a_\tau=(\boldsymbol{a\tau})$ — проекция его на единичный вектор $\boldsymbol{\tau}$, касательный к кривой, $d\boldsymbol{S}$ — элемент площади поверхности, dl — элемент длины кривой. Пусть $\boldsymbol{a}$ — распределение скоростей движущейся жидкости, тогда первый интеграл равен объёму жидкости, пересекающей данную поверхность в единицу времени. Если $\boldsymbol{a}$ — силовое поле, то второй интеграл равен работе, совершаемой при перемещении пробного тела вдоль данной кривой. В случае замкнутой кривой такой интеграл наз. ц и р к у л я ц и е й векторного поля.

Эти интегралы фигурируют в осн. теоремах В. а.— *Гаусса — Остроградского формуле* и *Стокса формуле*:

$$\oint_{\partial V}a_n\,dS=\int_V\operatorname{div}\boldsymbol{a}\,dV,\quad\oint_{\partial S}\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}=\int_S(\operatorname{rot}\boldsymbol{a})_n\,dS.$$

Здесь ∂V — поверхность, являющаяся границей области V, а ∂S — кривая, ограничивающая поверхность S. Кружки на значках интегралов означают, что интегрирование ведётся по замкнутой поверхности и замкнутой кривой. Положит. направление нормали к поверхности S должно быть ориентировано относительно направления обхода контура ∂S так же, как положит. направление оси x_3 — относительно положит. направления вращения в плоскости x_1, x_2. Полагая в ф-ле Гаусса — Остроградского $\boldsymbol{a}=\psi\operatorname{grad}\varphi$, получим важную теорему Грина

$$\oint_{\partial V}\psi(\operatorname{grad}\varphi)_n\,dS=\int_V\{\psi\Delta\varphi+(\operatorname{grad}\psi\operatorname{grad}\varphi)\}\,dV.$$

Её следствием является ф-ла

$$\oint_{\partial V}(\psi\operatorname{grad}_n\varphi-\varphi\operatorname{grad}_n\psi)\,dS=\int_V(\psi\Delta\varphi-\varphi\Delta\psi)\,dV.$$

Др. интегральные теоремы можно получить как следствия уже сформулированных:

$$\oint_{\partial S}\varphi\,d\boldsymbol{r}=\int_S[\boldsymbol{n}\operatorname{grad}\varphi]\,dS,$$
$$\oint_{\partial V}\varphi\boldsymbol{n}\,dS=\int_V\operatorname{grad}\varphi\,dV,$$
$$\oint_{\partial V}[\boldsymbol{na}]\,dS=\int_V\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,dV.$$

Понятия В. а., определённые выше для *евклидова пространства*, можно обобщить на *риманово пространство* и др. *многообразия*. Дифференц. операции приводят к понятию *ковариантной производной*, интегральные теоремы формулируются на языке *дифференциальных форм*.

Лит. см. при ст. *Векторная алгебра*. *М. Б. Менский.*

ВЕКТОРНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ — *потенциал*, определяющий вихревую часть векторного поля.

В электродинамике поле магн. индукции $\boldsymbol{B}$ является строго вихревым ($\operatorname{div}\boldsymbol{B}=0$); для этого поля вводят В. п. $\boldsymbol{A}$ (часто наз. также вектор-потенциалом): $\boldsymbol{B}=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$. При этом напряжённость электрич. поля $\boldsymbol{E}$ определяется ф-лой $\boldsymbol{E}=-c^{-1}\partial\boldsymbol{A}/\partial t-\nabla\varphi$, где φ — скалярный потенциал (см. *Потенциалы электромагнитного поля*); использована *Гаусса система единиц*. Связь потенциалов и полей не является взаимно однозначной, поэтому В. п. следует рассматривать как вспомогат. величину, не допускающую прямых измерений, но облегчающую расчёт эл.-магн. полей.

Обращение к В. п. позволяет упростить выражение для энергии взаимодействия W системы зарядов и токов (объёмная плотность ρ и $\boldsymbol{j}$) с внеш. эл.-магн. полем: $W=\int\{\rho\varphi+c^{-1}(\boldsymbol{jA})\}d\boldsymbol{r}$. Градиентная инвариантность этого выражения обеспечивается ур-нием непрерывности $\partial\rho/\partial t+\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0$. Отсюда следует, что частица с зарядом q в эл.-магн. поле в дополнение к обычному (чисто динамич.) импульсу обладает ещё э л е к т р о к и н е т и ч е с к и м и м п у л ь с о м $\boldsymbol{p}_{\text{эк}}=q\boldsymbol{A}/c$, что позволяет придать В. п. соответств. интерпретацию.

В случае перем. процессов с фиксир. зависимостью от времени (напр., $\sim\exp[i\omega t]$) можно исключить скалярный потенциал и для описания эл.-магн. поля использовать только В. п. Так, при лоренцевой калибровке спектральная амплитуда В. п. $\boldsymbol{A}_\omega$ удовлетворяет волновому ур-нию, а спектральные составляющие электрич. $\boldsymbol{E}_\omega$ и магн. $\boldsymbol{B}_\omega$ полей в однородной среде с проницаемостями $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ определяются соотношениями:

$$\boldsymbol{E}_\omega=\frac{c}{i\omega\varepsilon\mu}\left(\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{A}_\omega+\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}\boldsymbol{A}_\omega^2\right),\ \boldsymbol{B}_\omega=\operatorname{rot}\boldsymbol{A}_\omega.$$

Лит.: Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М., Теория поля, 6 изд., М., 1973; М о р с Ф. М., Ф е ш б а х Г., Методы теоретической физики, пер. с англ., т. 1, М., 1958.

М. А. Миллер, Е. В. Суворов.

ВЕКТОРНЫЙ ТОК — квантовый оператор, входящий в гамильтониан слабого взаимодействия. Преобразуется как 4-вектор при собственных *Лоренца преобразованиях*. При инверсии системы отсчёта пространственные компоненты В. т. меняют знак, а временна́я компонента не меняется. В гамильтониан теории *электрослабого*