до его границы, на к-рой её модуль не превосходит постоянной M. Если, кроме того, $z^{\rho}\ln|f(z)|\to 0$ при $z\to\infty$, то $|f(z)|\leqslant M$ во всём секторе. Теоремы типа Фрагмена — Линделёфа существенно используются в теории рассеяния элементарных частиц высокой энергии, приводя там к асимптотич. соотношениям между сечениями рассеяния частиц и античастиц (*Померанчука теорема* и др.).

Понятие аналитичности имеет смысл также и на множествах более сложных, чем области комплексной плоскости $\mathbb{C}$, но локально устроенных как последние. Напр., добавляя к $\mathbb{C}$ бесконечно удалённую точку, получают расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$. Комплексная структура в окрестности бесконечно удалённой точки задаётся отображением $z\to z^{-1}$, переводящим её в начало координат. Ф-ция $f(z)$ аналитична в окрестности бесконечно удалённой точки, если $f(z^{-1})$ аналитична в окрестности точки $z=0$. Для областей в $\overline{\mathbb{C}}$ справедливо всё сказанное выше. В то же время, если $f(z)$ аналитична во всей $\overline{\mathbb{C}}$, то она постоянна (теорема Лиувилля).

Особые точки. Точки, в к-рых нарушается аналитичность ф-ции $f(z)$, наз. её особыми точками. Если $f(z)$ аналитична во всех точках нек-рой окрестности точки z_0, кроме, быть может, её самой, то z_0 наз. изолиров. особой точкой. В окрестности изолиров. особой точки $f(z)$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Лорана, содержащий, быть может, отрицат. степени $(z-z_0)$:

$$f(z)=\sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n .$$

Различают три типа изолиров. особых точек: устранимую особую точку, полюс и существенно особую точку. Точка z_0 наз. устранимой, если $f(z)$ ограничена в нек-рой её окрестности. Полагая $f(z_0)=\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ (этот предел существует), получают ф-цию, аналитическую и в z_0. Изолиров. особая точка z_0 наз. полюсом, если $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=\infty$. В этом случае лишь конечное число членов лорановского разложения $f(z)$ в z_0 с отрицат. степенями $(z-z_0)$ отлично от нуля. Коэф. c_{-1} наз. вычетом функции $f(z)$ в точке z_0 и обозначается $\operatorname{res}_{z_0} f(z)$. Если бесконечное число членов ряда Лорана $f(z)$ в точке z_0 с отрицат. показателями n отлично от нуля, то z_0 наз. существенно особой точкой. Существенно особые точки характеризуются тем, что для любого комплексного числа a существует последовательность z_k, сходящаяся к z_0 при $k\longrightarrow\infty$, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k)=a$.

Пусть γ — замкнутый контур, лежащий в области аналитичности ф-ции $f(z)$ и содержащий внутри себя лишь её полюсы (их обязательно конечное число), расположенные в точках $z_1, \ldots, z_n$, тогда

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz=2\pi i\sum\nolimits_{k=1}^{n}\operatorname{res}_{z_k} f(z).$$

Эта формула является основой теории вычетов и служит эфф. инструментом для вычисления определ. интегралов. Ф-ция, аналитическая во всей комплексной плоскости, за исключением, быть может, полюсов, наз. мероморфной. Ф-ция, не имеющая в $\mathbb{C}$ особых точек, наз. целой.

Многозначные функции. Всякая А. ф. однозначно восстанавливается по своим значениям в любом сколь угодно малом открытом подмножестве области аналитичности. Более того, если две аналитические в D ф-ции совпадают в счётном числе точек из D, имеющих хотя бы одну предельную точку, также принадлежащую D, то эти ф-ции совпадают и всюду в D. Типичной является ситуация, когда А. ф. первоначально задана в нек-рой области D, но продолжается до А. ф. в существенно большей области. Т. о., возникает задача об *аналитическом продолжении* заданной А. ф. до А. ф. в максимально возможной области. Чтобы эта задача была разрешима в классе однозначных ф-ций, приходится расширить понятие области, допустив возможность её самоналожений. Это приводит к понятию неоднолистных областей, в частности *римановой поверхности* данной А. ф. Пусть $f(z)$ — А. ф. в области D и γ — нек-рый путь, соединяющий точку z_0 из D с точкой z' из расширенной комплексной плоскости. Говорят, что $f(z)$ аналитически продолжается вдоль γ, если существует конечное число кругов V_k, $k=0, 1, \ldots, N$ с центрами, последовательно расположенными на γ $(z_N=z')$, и ф-ции $f_k(z)$ аналитические в V_k, такие, что $f_k(z)=f_{k-1}(z)$ в пересечении V_k и V_{k-1}. Если $f(z)$ аналитически продолжается вдоль двух путей γ_1 и γ_2 с началом в z_0 и концом в z', то в результате этих продолжений в окрестности точки z' могут получиться, вообще говоря, разные А. ф. Риманову поверхность ф-ции $f(z)$, первоначально заданной в D, можно понимать как множество всех путей, к-рые исходят из нек-рой точки z_0, лежащей в D, и вдоль к-рых $f(z)$ аналитически продолжима. При этом два пути отождествляются, если они заканчиваются в одной и той же точке и приводят к одинаковым А. ф. в её окрестности. Тем самым всякая аналитическая в D ф-ция $f(z)$ определяет нек-рую ф-цию, аналитическую на своей римановой поверхности, — полную А. ф.

Пусть $f(z)$ аналитична в нек-рой области D и аналитически продолжается (вообще говоря, неоднозначно) вдоль любого пути, не содержащего фиксиров. точку z_0 (такая точка наз. точкой ветвления). Если провести разрез плоскости $\mathbb{C}$, соединяющий точку z_0 с бесконечно удалённой точкой, то можно получить конечное или счётное число ф-ций, аналитичных в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом, получающихся из $f(z)$ аналитич. продолжением вдоль путей, огибающих z_0 заданное число раз. Риманову поверхность ф-ции $f(z)$ можно представить себе как конечное или счётное число экземпляров плоскостей $\mathbb{C}$ с разрезом (листов), склеенных вдоль берегов разрезов таким образом, что каждый оборот вокруг z_0 переводит точку на новый лист.

А. ф., заданная в области D, наз. однолистной в D, если она осуществляет взаимно однозначное отображение D на её образ $D^*=f(D)$, к-рый также является областью. Всякая однолистная в D А. ф. задаёт конформное отображение D на D^* в том смысле, что оно сохраняет углы между кривыми. Обратно, всякое (гладкое) конформное взаимно однозначное отображение D на D^*, сохраняющее углы между кривыми (по величине и знаку), порождается нек-рой однолистной в D А. ф., такой, что $D^*=f(D)$. Области D и D^* в этом случае наз. конформно изоморфными. Согласно теореме Римана, любые две односвязные области, границы которых состоят более чем из одной точки, конформно изоморфны.

Функции многих переменных. Теория А. ф. мн. комплексных переменных по сравнению с одномерной теорией обладает новыми специфич. чертами. Ф-ция $f(z)$, $z=(z_1, \ldots, z_n)$ наз. аналитической (голоморфной) в области D n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, если в окрестности каждой её точки $z_0=(z_{01}, \ldots, z_{0n})$ она представляется в виде суммы абсолютно сходящегося степенного ряда:

$$f(z)=\sum\nolimits_{k_1=0}^{\infty}\ldots\sum\nolimits_{k_n=0}^{\infty} c_{k_1,\ldots,k_n}(z-z_{01})^{k_1}\ldots(z_n-z_{0n})^{k_n}.$$

По теореме Гартогса $f(z)$ аналитична в D тогда и только тогда, когда она аналитична по каждому переменному в отдельности при фиксированных остальных в соответствующих сечениях области D.

Важное отличие многомерной теории от одномерной состоит в существовании таких областей, что голоморфные в них ф-ции обязательно аналитически продолжаются в существенно бо́льшие области. В частности, при $n\geqslant 2$ не существует А. ф. с изолиров. особенностями. Естеств. областями определения А. ф. служат т. н. области голоморфности. Область D в $\mathbb{C}^n$ наз. областью